エンジニアの素朴なギモン

第1回 正しさを疑ってみる

小暮裕明

本連載では筆者が技術コンサルタントとして多くの企業で経験した問答を紹介します．筆者はソフトウェア設計が専門ですが，なかでも電磁界シミュレーションにまつわる素朴な疑問は，工学向きで役立つかもしれません．話がよく脱線するクセがあることはあらかじめご容赦ください．でも，パスツール曰く「チャンスの女神は待ち構えた知性にのみ微笑む(Chance favors only the prepared mind.)」のですから，ムダな知識はひとつもないかもしれません．（筆者）

新入社員の特権は，ギモンに思ったら何でも先輩に聞けることでしょう．筆者がSE(system engineer)になりたてのころ「先輩を困らせるほどの質問攻めでノウハウを盗め」と指導されました．真(ま)に受けて先輩をずいぶん困らせましたが，おかげで仕事が覚えられました．素朴なギモンで学校の先生を困らせた常習犯でしたが，恩師たちの評価は二分されます．

「電圧(voltage)をvで表記するのは分かるが，電流はなぜiなのか」

分かったところで工学的には役立たない素朴な疑問ですが，これを調べる過程で得たものは大きいといえます．気になるとビットが立ちっぱなしですが，高じるとモノづくりに響くので，自分は工学向きでないと悩んだ時期もありました．先輩になれば質問される立場です．しかし最近は，遠慮がちなのか，諦めているのか，新人が先輩に食い下がる光景を見かけなくなったと聞きます．

＊　＊　＊

先輩：中学以来の疑問がやっと解けた．江戸時代，博多湾で農民が偶然掘り出したという金印(**写真1**)は，「後漢書」に記された印綬だった．ところが教科書のカラー写真は金ピカの印鑑で，2000年近く土中にあったとはにわかに信じがたい．歴史の先生は，ねばる中学生の疑問を持て余すばかりだったが，あれから数十年，最近読んだ本[注1]では95％贋作であると，コロンボ警部のような探偵ぶり．中学時代の直観は間違っていなかった．なんとも晴れ晴れとした気分だ．

新人：電気の世界とは関係ない話ですね．

まあ聞きなさい．当時疑問をいだいた理由はもう一つ，習いたての確率だった．北九州で発掘されたのは，いかにも邪馬台国の論争につながりそうだ．しかし，田んぼの溝掘りでたまたま見つかる確率は何％なのだろうか[注2]．

写真1　江戸時代に博多湾の志賀島で農民が偶然掘り出した金印
「漢委奴國王」と刻印されている．福岡市博物館所蔵．
http://museum.city.fukuoka.jp/jb/jb_fr2.html

注1：三浦祐之；金印偽造事件「漢委奴國王」のまぼろし，幻冬舎，2006年11月．
注2：三浦祐之氏の著書では，印面と日本列島の面積を単純な割り算で，700兆分の1としている．

KeyWord　真値，精密な測定，正確な測定，確率，有効けた数，誤差の伝搬

● **真値は神のみぞ知る**

現実に起こっている事象を観測して得た結果を，測定値と呼んでいる．

測定値には誤差がつきものです．単純な間違いはともかく，個人差，測定器の精度あるいは感度，測定環境，季節変化など，誤差の要因はさまざまです．

誤差の定義をおさらいしよう．誤差eは，測定値をM，真値(true value)をTとしたとき，

$$e = M - T \quad \cdots\cdots (1)$$

で得られる．当たり前すぎて式で表すまでもないけれど．

でも真値というのが真実の値という意味ならば，誤差をまったくゼロにすることができないかぎり，それはだれにも分からないということでしょう．

なるほど，神のみぞ知る値ということか．しかし真値に極めて近ければ実用上は問題ないとするのが人間の世界ではないかな．ただし誤差が大きすぎるのは問題だから，何回か測定して誤差が小さい測定は正確といえる．

また，測定値のばらつきが小さければ精密といえるので，**図1**のAの測定はBより精密な測定だ．

誤差の大きい測定器を使うと，**図2**のCのように，精密であっても正確ではないですね．

するどい指摘だ．そもそも測定器自身の正確さはメーカが保証していると信用しているけれども，その比較の基準となるものが正確でないといけない．そこで電気標準器というものがあって，例えば電圧の標準器は**図3**の標準電池などがある．またマンガニン合金を使った標準抵抗器もある．

標準電池は化学変化によって発生する電圧を得るのだから，温度変化や外光などの影響を受けます．現にこの電池は，20 ℃において1.01864［V_{abs}(絶対ボルト)］とされていますね．

ボルタが電池の元祖(**写真2**)を発明したころは正確な測定法がなかったが(**写真3**)，1908年にようやく国際的に電気の単位を統一する会議が開催された．そこで決まったのが国際アンペアと国際オームだ．ところが40年も経たないうちに測定法が進歩して，電磁気学の理論と合わないことが分かった．そこで登場したのが絶対単位というわけだ．

図1　測定値と測定回数の関係(1)
Aの測定はBの測定より精密さが良い．
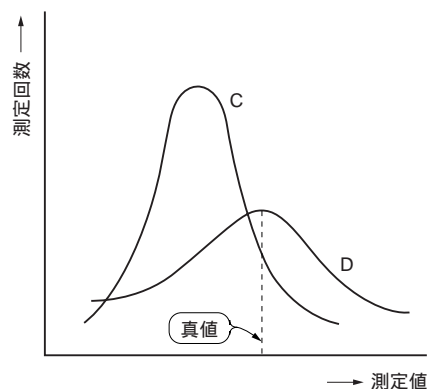
図2　測定値と測定回数の関係(2)
Cの測定は精密であっても正確ではない．
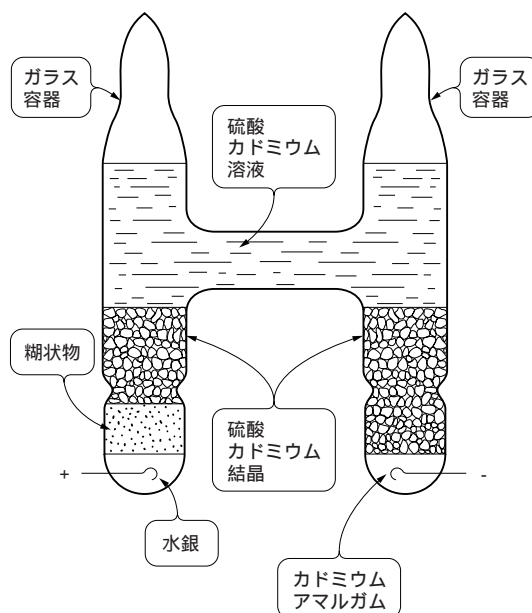
図3　標準電池の構造
ウェストンが1884年に開発を始めたカドミウム標準電池で，1990年にジョセフソン効果電圧標準装置が使われるまで約100年間活躍した．

絶対アンペア[注3]は無限に長い直線状導体を使って定義され，これをもとに絶対ボルト[注4]，オームを定めています．しかし無限長ではそもそも正確さを測定できません．

だからabsolute（絶対）なんだ．完全無欠という意味だが，神と訳す場合もある．

やはり神のみぞ知る…ですか．

● **真値と確率**

絶対アンペアは**図4**のようにして測れそうだが，問題は無限長だ．無限の線状電流を思考実験してみよう．電流は宇宙の果てに向かうが，そもそも電流の源泉は反対側の宇宙の果てにある．そこで直線の両端は無限遠でつながり電流はループしていると思考する．**図5**は絶対測定を行う電流天秤といって，ここにループ電流が使われている．**図5**で**図4**をめでたく測定できるというわけだ．

うーん．無理やり納得させられそうです．

さて測定は1回よりn回行うべきだ．それは**図1**や**図2**からも分かる．得られた測定値をx_1，x_2，…，x_nとすれば，合計をnで割った平均値を最も確からしい値として使う．しかし君が指摘したように，この値は真値に一致するとは限らない．そこで標準偏差[注5]σ（シグマ）を使ってどの程度離れているかを評価すると，真値が－σと＋σの間にある確率は68％となる．

：人間は真実の値を確率でしか表せないということですか．ハイゼンベルグ[注6]は，物体を見るだけで物体の運動が攪乱（かくらん）され，運動する物体の位置と速度を同時に正確に測定することは原理的に不可能であると提唱しています．

：素粒子の世界ではそのようだが，人間がじかに扱う大きな物体ではこのような攪乱はほとんど問題にならない．さて，標準偏差σを小さくすれば測定の信頼度が高まるのだから，1回の測定ではダメで数回は必要になる．しかし何十回繰り返したからといって，σはそれほど小さくならないが….

注3：絶対アンペアとは，真空中に1mの間隔で平行に置いた無限に小さい円形断面を有する2本の無限に長い直線状導体のそれぞれを通過し，その導体の長さ1mごとに2×10^{-7}ニュートンの力を及ぼし合う一定電流の大きさを1A（アンペア）とすること．
注4：絶対ボルトとは，1Aの電流が流れる導体の2点間において消費される電力が1Wであるとき，これらの2点間の電圧を1Vとすること．
注5：標準偏差とは，各測定値と平均値との差（偏差）の2乗の平均の平方根．
注6：ハイゼンベルグ（1901年～1976年）は，ドイツの理論物理学者．1926年に行列力学，1927年に不確定性原理を提唱，1932年にノーベル物理学賞を受賞した．
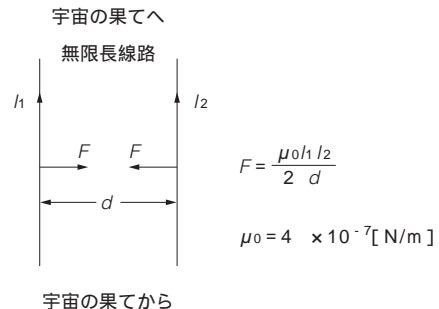
図4　二つの線状電流が及ぼす力から電流を知るしくみ
平行導体に生じる吸引力（電流の向きが同じ場合）Fを測定して，I_1またはI_2を求める．

写真2　ボルタの電堆（でんたい）
1800年，Alessandro Volta は二つの異なる金属板の対を積み重ねて蓄電池を発明した（イタリア北部コモ湖畔にあるボルタ博物館にて筆者写す）．

写真3　静電気を測る装置
二つの小さい導体球が開く角度を目盛で読む（ボルタ博物館にて筆者写す）．
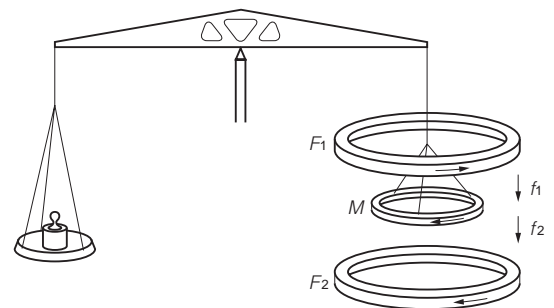
図5　絶対測定を行う電流天秤
ループ電流が及ぼす力，f_1，f_2を天秤で測る．

● **有効けた数と誤差の伝搬**

測定結果の数字を何けたまで読めばよいか，データをまとめるときにいつも悩みます．測定器はディジタル表示のけた数が多すぎます．

そういえば電磁界シミュレーションの結果を10けたのままで発表した人がいたね．10けたもあるデータというのはどこまで信頼がおけるのか疑いたくなるね．測定数値のけた数は，製造で要求される正確さに必要な限度までで十分だ．数値を有効数字nけたで丸めるにはどうする？

(n＋1)けた目を四捨五入しますが，マズイですか？

小数点以下nけたの数値に丸めるときも同じだが，

(1) (n＋1)けた目以下の数値がnけた目の1単位の1/2未満のときは切り捨て．

(2) (n＋1)けた目以下の数値がnけた目の1単位の1/2を超えるときは切り上げ．

(3) (n＋1)けた目以下の数値が5のときは，nけた目の数字が偶数の時は切り捨て，奇数の時は切り捨て．

丸める方法はほかにもある．(3)はいつも5を切り上げると，すべての数の和が大きすぎて過大評価されることがあるからだ．

123000と書くと，どこまでが有効数字なのか分かりません．1230が有効数字の場合は1230×10^2あるいは1.230×10^5と書いています．

そのとおり．いくつか測定値を足して求めた値は，それぞれの測定値に誤差があるから，誤差の最大値はそれぞれの誤差の絶対値の和になる．だからそれぞれの誤差を同程度に小さくしなければならない．一つでも誤差が大きいと，ほかの誤差をいくら小さくしても誤差の最大値は小さくできない．これは測定値の一番下のけたをそろえるということで，例えば123と45.6を平均するときは，123が123.0まで正確であれば(123.0＋45.6)/2＝84.3とする．123の小数第1位が分からない場合は(123＋46)/2＝84とする．

求める量yが測定値x_1，x_2の積($y = x_1x_2$)で表される場合はどうでしょうか．誤差を式で表すと，

$$y + \Delta y = (x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2) = x_1 x_2 + x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 \Delta x_2 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

Δx_1，Δx_2は非常に小さいので省略して，左辺をy，右辺をx_1x_2で割って変形すると，

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

積($y = x_1x_2$)の場合は，$|\Delta x_1/x_1|$，$|\Delta x_2/x_2|$(相対誤差)を同程度に小さくしなければならないということですか．

そのとおり．これはx_1，x_2の有効数字のけた数をそろえるということ．例えば直流電圧の測定値が110[V]，直流電流の測定値が2[A]のときに電力は$110 \times 2 =$ 220[W]だが，電流が1けたの数なので，信頼できる電力の数も有効数字1けたとなり，2×10^2[W]とする．もし電流が2.00[A]であれば220[W]となる．測定値の誤差は最終結果にこのような法則で伝搬するので，それぞれ必要な正確さで測定することが大切だ．

参考・引用*文献

(1) 西野治；電磁気計測，電気学会，1974年(19版)．

こぐれ・ひろあき

小暮技術士事務所・技術士(情報工学部門)

http://www.kcejp.com/